Αν $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Δεν υπαρχη φυσικος } x \\ n < x < n+1 \end{array} \right.$

Αφού

$1 = \min \mathbb{N}$ και σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση

$$\mathbb{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ($\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} = \{x : -x \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Πρόταση

$$z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \underbrace{(\exists m, n \text{ εν } \mathbb{N}) \; z = m - n}_{(*)}$$

Αποδ ($\Rightarrow$) Έστω $z \in \mathbb{Z}$ Τότε:

$z \in \mathbb{N} \Rightarrow z + 1 \in \mathbb{N}$ Άρα: $z = (z+1) - 1$

$z = 0 \Rightarrow z - 1 = 1 \Rightarrow z = 1 - 1$

$-z \in \mathbb{N} \Rightarrow z = 1 - (-z + 1)$

($\Leftarrow$) Έστω ισχύει το (*)

$n \in \mathbb{N}$ $\quad X_n = \{x \in \mathbb{N} : n - x \in \mathbb{Z}\}$

$1 \in X_n$ γιατί $n - 1 = 0$ ή $n - 1 \in \mathbb{N}$

Οδδ. ~~X_n επαγωγικό~~ Τότε $\mathbb{N} \subseteq X_n$ $\Rightarrow$ Άρα $X_n = \mathbb{N}$

Ακόμη $X_n \subseteq \mathbb{N}$

Θεωρώ $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in X_n \Rightarrow \boxed{n - m \in \mathbb{Z}}$

Αν $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} \text{Δεν υπάρχει φυσικός } x \\ n < x < n+1 \end{cases}$

Αφού

$1 = \min \mathbb{N}$ και σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση

$$\mathbb{N} = \{1,\ 1+1,\ 1+1+1,\ 1+1+1+1\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

<u>ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ</u> ($\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} = \{x : -x \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

<u>Πρόταση</u>

$$z \in \mathbb{Z} \iff \underbrace{(\exists m, n \in \mathbb{N})\ z = m - n}_{(*)}$$

<u>Αποδ</u> ($\Longrightarrow$) Έστω $z \in \mathbb{Z}$ Τότε:

$z \in \mathbb{N} \to z+1 \in \mathbb{N}$ Άρα: $z = (z+1) - 1$

$z = 0 \to z \cdot 1 = 1 \Rightarrow z = 1 - 1$

$-z \in \mathbb{N} \Rightarrow z = 1 - (-z+1)$

($\Longleftarrow$) Έστω ισχύει το (*)

<u>$n \in \mathbb{N}$</u> $X_n = \{x \in \mathbb{N} : n - x \in \mathbb{Z}\}$

$1 \in X_1$ γιατί $n - 1 = 0$ ή $n - 1 \in \mathbb{N}$

Θδο. ~~X_n επαγωγικό~~ Τότε $\left.\mathbb{N} \subseteq X_n \right\} \Rightarrow$ Άρα $X_n = \mathbb{N}$

Ακόμη $X_n \subseteq \mathbb{N}$

Θεωρώ $m \in \mathbb{N} \to m \in X_n \Rightarrow \boxed{n - m \in \mathbb{Z}}$

Θ.δ.ο X_n επαγωγικό

Έστω $z \in X_n \Rightarrow \underbrace{n - z \in \mathbb{Z}}$ Άρα

$n - z \in \mathbb{N} \Rightarrow n - (z+1) = (n-z) - 1 \begin{cases} = 0 \\ n \\ \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow n - (z+1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

ή $\Rightarrow \underline{z+1 \in X_n}$

$n - z = 0 \Rightarrow n - (z+1) = \cancel{(n-z)}^{0} - 1 = -1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \underline{z+1 \in X_n}$

ή

$-(n-z) \in \mathbb{N} \Rightarrow -(n-z)+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow -\left[(n-z)-1\right] \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow (n-z) - 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow n - (z+1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \underline{z+1 \in X_n}$

ΠΡΟΤΑΣΗ.

Αν x, y είναι ακέραιοι, τότε

$x+y \in \mathbb{Z}$ και $x \cdot y \in \mathbb{Z}$. κ' $x - y \in \mathbb{Z}$

Αποδ.

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\exists\, \kappa, \lambda \in \mathbb{N})\ x = \kappa - \lambda$

$y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\exists\, \mu, \nu \in \mathbb{N})\ y = \mu - \nu$

$x + y = (\kappa - \lambda) + (\mu - \nu) = \underbrace{(\kappa + \mu)}_{\text{φυσικός}} - \underbrace{(\lambda + \nu)}_{\text{φυσικός}} \in \mathbb{Z}$

$x \cdot y = (\kappa - \lambda)(\mu - \nu) = \kappa(\mu - \nu) + (-\lambda)(\mu - \nu) = \kappa\mu + \kappa(-\nu) + (-\lambda)\mu + (-\lambda)(-\nu)$

$\underline{\alpha(-\beta) = -\alpha \cdot \beta}$

$\kappa\mu - \kappa\nu - \lambda\mu + \lambda\nu = \underbrace{(\kappa\mu + \lambda\nu)}_{\text{φυσικός}} - \underbrace{(\kappa\nu + \lambda\mu)}_{\text{φυσικός}} \in \mathbb{Z}$

$x - y = (\kappa - \lambda) + (\mu - \nu) = (\kappa + \mu) - (\lambda + \nu)$

Αποδ. $-(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta$

$\underbrace{-\alpha - \beta} + (\alpha + \beta) = (-\alpha + \alpha) + (-\beta + \beta) = 0 + 0 = 0$

$\downarrow$

$-\alpha - \beta = -(\alpha + \beta)$ ο αντίθετος του $\alpha + \beta$

Αποδ. $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\cdot\beta}$, $\alpha \neq 0 \neq \beta$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\right)(\alpha\cdot\beta) = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\left(\frac{1}{\beta}\cdot\beta\right) = 1\cdot 1 = 1$$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\cdot\beta}$ ο αντίστροφος του $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}$

Ν.δ.ο $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$$\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{R}^+ \cap \left(\{x : -x \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}\right)$$

$A \cap (B \cup \Gamma) =$

$$= \underbrace{\mathbb{R}^+ \cap \{x : -x \in \mathbb{N}\}}_{\emptyset} \cup \underbrace{(\mathbb{R}^+ \cap \{0\})}_{\emptyset} \cup \underbrace{(\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{N})}_{\mathbb{N}\ (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+)} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x = \alpha\beta^{-1}, \alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{N}\} \qquad \alpha\cdot\beta^{-1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} \overset{?}{=} \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta}$ $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta} \overset{?}{=} \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta} = (\alpha\beta^{-1})(\gamma\cdot\delta^{-1}) = (\alpha\cdot\gamma)(\beta^{-1}\cdot\delta^{-1}) = (\alpha\cdot\gamma)(\beta\cdot\delta)^{-1} = \frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = (\alpha\cdot\beta^{-1})(\delta\cdot\delta^{-1}) + (\gamma\delta^{-1})(\beta\cdot\beta^{-1}) =$$

$$= (\alpha\cdot\delta)(\beta^{-1}\delta^{-1}) + (\gamma\beta)(\delta^{-1}\beta^{-1}) = (\alpha\delta)\underline{(\beta\delta)^{-1}} + (\gamma\beta)\underline{(\beta\cdot\delta)^{-1}} =$$

$$= (\alpha\delta + \gamma\beta)(\beta\cdot\delta)^{-1} = \frac{\alpha\delta + \gamma\beta}{\beta\delta}$$